

文章编号: 1002-2082(2009)04-0596-05

一阶光学系统分数傅里叶变换的相空间分析

潘卫清¹, 朱勇建², 王建中¹

(1. 浙江科技学院, 浙江 杭州 310023; 2. 湖南大学, 湖南 长沙 410082)

摘要: 在维格纳相空间中, 通过将一阶光学系统的传输矩阵分解为坐标旋转、比例缩放和啁啾矩阵的组合, 得到了一阶光学系统在空域的分数傅里叶表示。结果表明: 任意一阶光学系统均可表示为经过比例缩放和二次相位调制的分数傅里叶变换。通过将输入输出光场在相空间中作 $\pi/2$ 角旋转, 得到了一阶光学系统在频域的传输矩阵和衍射积分公式, 进而得到了一阶光学系统在频域的分数傅里叶表示。比较空域和频域一阶光学系统的相空间变换矩阵, 说明2个系统本质上属同一变换在不同基坐标下的表示, 并推导出了光学系统在空域和频域具有相同分数傅里叶变换的条件。

关键词: 相空间; 维格纳分布; 分数傅里叶变换; 一阶光学系统

中图分类号: TN201

文献标志码: A

Phase-space analysis for fractional Fourier transform of first-order optical system

PAN Wei-qing¹, ZHU Yong-jian², WANG Jian-zhong¹

(1. Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China;

2. Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: The fractional Fourier express of the first-order optical system was derived by decomposing the transfer matrices of first-order optical system into coordinate rotation matrix, scale matrix and chirp matrix in Wigner phase space. The results show that an arbitrary first-order optical system can be expressed as the scaled and chirp modulation fractional Fourier transform. The transfer matrix and diffractive integral formula in frequency domain were acquired by rotating the input and output optical field $\pi/2$ in the phase space. Accordingly the fractional Fourier transforms of a first-order optical system in frequency domain were also obtained. By comparing the transfer matrices of two first-order optical systems in space and frequency domains respectively, it is found that the two first-order optical systems in different domain can be expressed as two different expressions of one and the same transfer based on different coordinates. At last the condition is derived for an optical system to implement the fractional Fourier transform in space and frequency domains with the same order.

Key words: phase space; Wigner distribution; fractional Fourier transform; first-order optical system

引言

一阶光学系统是一种最常见的光学系统,它对

输入光场的变换作用可以由 Collins 衍射积分变换公式给予描述^[1]。而分数傅里叶变换是传统傅里叶

收稿日期: 2008-11-26; 修回日期: 2009-01-28

作者简介: 潘卫清(1976—),男,浙江临安人,博士,主要从事信息光学的教学与研究工作。E-mail: pan_weiqing@163.com

变换的推广, 具有许多新颖的优良特性, 目前已成为光学和信号处理领域颇为活跃的一个学科分支^[2-3]。分数傅里叶变换与 Collins 积分变换有着密切联系, 通过复杂的变量代换和傅里叶变换运算可以找到 Collins 公式在空域和频域的分数傅里叶表述^[4-5]。

相空间是一个由空间坐标和频率坐标构成的信号表示空间, 它可以对信号同时进行空间和频率分析。一个信号或系统通过其维格纳分布函数可转换为相空间表示^[6]。一阶光学系统在相空间中的作用对应于简单的坐标变换, 而分数傅里叶变换在相空间中又可表示为坐标旋转^[7], 那么在相空间中是

否可以找到一阶光学系统积分变换与分数傅里叶变换的简单联系呢? 本文首先概述线性正则变换与分数傅里叶变换的定义, 以维格纳相空间中的变换矩阵, 然后通过对一阶光学系统的相空间变换矩阵进行分解, 得到了 Collins 公式的分数傅里叶表示和频域中的 Collins 衍射积分公式。

1 线性正则变换与分数傅里叶变换

为了方便, 在本文中我们采用一维函数表示空间光场, 其结果可直接推广至二维情况。一维函数 $f(x_1)$ 的线性正则变换^[8]定义为

$$f_M(x_2) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{b}} \int f(x_1) \exp \left[\frac{i\pi}{b} (ax_1^2 - 2x_1x_2 + dx_2^2) \right] dx_1 \quad (1)$$

它由参数矩阵 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $|M| = ad - bc = 1$ 惟一确定。该变换在维格纳相空间中起坐标变换作用, 亦即:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中 x 和 σ 分别是构成相空间的空间和频率坐标。多个正则变换的级联可由各个变换矩阵的叠乘来描述。取 $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$, $c = -\sin \alpha$, $d = \cos \alpha$, 线性正则变换转为 α 阶分数傅里叶变换, 它在相空间中对应对 α 角的顺时针坐标旋转, 写成积分变换形式^[3]:

$$F_\alpha[f(x_2)] = \frac{e^{i(\alpha/2 - \pi/4)}}{\sqrt{\sin \alpha}} \int f(x_1) \exp [i\pi(\cot \alpha x_1^2 - 2 \sec \alpha x_1 x_2 + \cot \alpha x_2^2)] dx_1 \quad (3)$$

式中: $\alpha = p\pi/2 \in [-\pi, \pi]$; $F_\alpha[\cdot]$ 表示 α 阶分数傅里叶变换, 它与线性正则变换只差一常数相位因子 $e^{i\alpha/2}$ 。

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 分数傅里叶变换转为普通傅里叶变换, 相应地在相空间作了 $\pi/2$ 的顺时针坐标旋转, 即

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

2 空域中一阶光学系统的分数傅里叶表述

由文献[1]可知, 一个共轴变换矩阵元为

ABCD 的一阶光学系统, 对于输入光场 $E_1(x_1)$, 可由 Collins 衍射积分公式求出其输出光场 $E_2(x_2)$, 即

$$E_2(x_2) = \left(-\frac{i}{\lambda B} \right)^{\frac{1}{2}} \int E_1(x_1) \times \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda B} (Ax_1^2 - 2x_1x_2 + Dx_2^2) \right] dx_1 \quad (5)$$

将(3)式与(1)式比较, 发现 Collins 公式在数学上属于线性正则变换, 它在相空间中的作用可参照(2)式, 于是可得到:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \lambda B \\ C/\lambda & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

由分数傅里叶变换在相空间的定义可知, 要将 Collins 公式表示为分数傅里叶变换, 只需将(6)式中的坐标变换矩阵分解为包函坐标旋转的矩阵因子形式, 对坐标变换矩阵作如下分解:

$$\begin{pmatrix} A & \lambda B \\ C/\lambda & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\lambda R & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1/M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (7)$$

由以上矩阵方程得:

$$\begin{cases} A = M \cos \alpha \\ \lambda B = M \sin \alpha \\ \frac{C}{\lambda} = \frac{M \cos \alpha}{\lambda R} - \frac{\sin \alpha}{M} \\ D = \frac{M \sin \alpha}{\lambda R} + \frac{\cos \alpha}{M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{\lambda B}{A} \\ M = \sqrt{A^2 + \lambda^2 B^2} \\ \frac{1}{\lambda R} = \frac{D}{\lambda B} - \frac{A}{\lambda B(A^2 + \lambda^2 B^2)} \end{cases} \quad (8)$$

根据文献[9], (7) 式等号右边 2 个相空间变换矩阵因子对应的积分核函数见表 1 所示。

表 1 变换矩阵与积分核函数对照表
Table 1 Transfer matrix to integral kernel function chart

变换矩阵	积分核函数	作用
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/\lambda R \end{pmatrix}$	$h_{\lambda R}(x_2, x_1) = e^{i\pi x_2^2/\lambda R} \delta(x_1 - x_2)$	$f(x_2) \xrightarrow{h_{\lambda R}} f(x_2)$
$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1/M \end{pmatrix}$	$h_M(x_2, x_1) = \frac{1}{\sqrt{M}} \delta(x_1 - x_2/M)$	$f(x_2) \xrightarrow{h_M} \frac{1}{\sqrt{M}} f(x_2/M)$

由此, 可根据(7) 式写出 Collins 积分核函数的分解式:

$$h(x_2, x_1) = \iint h_{\lambda R}(x_2, x''_2) h_M(x''_2, x'_2) h_a(x'_2, x_1) dx''_2 dx'_2 =$$

$$e^{i\pi x_2^2/\lambda R} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{M \sin \alpha}} \exp \left[i\pi \left(\cot \alpha \cdot x_1^2 - 2 \sec \alpha \cdot x_1 \left(\frac{x_2}{M} \right) + \cot \alpha \cdot \left(\frac{x_2}{M} \right)^2 \right) \right] \quad (9)$$

进而 Collins 积分(5) 式可重新表示为

$$E_2(x_2) = e^{i\pi x_2^2/\lambda R} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{M \sin \alpha}} \int E_1(x_1) \exp \left[i\pi \left(\cot \alpha \cdot x_1^2 - 2 \sec \alpha \cdot x_1 \left(\frac{x_2}{M} \right) + \cot \alpha \cdot \left(\frac{x_2}{M} \right)^2 \right) \right] dx_1 =$$

$$\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{M}} e^{i\pi x_2^2/\lambda R} F_a \left[E_1 \left(\frac{x_2}{M} \right) \right] \quad (10)$$

这就是 Collins 公式在空域的分数傅里叶变换表示, 从(10)式我们可看出, 任意一阶 ABCD 光学系统都可以表示为一个经过 M 比例缩放和二次相位调制的分数傅里叶变换。其中二次相位调制可通过选择一个半径为 R 的球面作输出光场的观察面而得以消除。

下面分析几种特殊情况:

1) 当 $A=0$ 时, 由(8)式得 $\alpha=\pi/2$, $M=\lambda B$, $R=B/D$, 代入(10)式, 得

$$E_2(x_2) = \frac{e^{-\alpha/2}}{\sqrt{\lambda B}} e^{i\pi D x_2^2/\lambda B} F_{\pi/2} \left[E_1 \left(\frac{x_2}{\lambda B} \right) \right] \quad (11)$$

(11)式表明, 若在一个半径为 B/D 的球面上观察, 输出光场是输入光场经过比例缩放的普通傅里叶变换。

2) 当 $A=D=0$ 时, 由(8)式得 $\alpha=\pi/2$, $M=\lambda B$, $R=\infty$, 代入(10)式, 得

$$E_2(x_2) = \frac{e^{-\alpha/2}}{\sqrt{\lambda B}} F_{\pi/2} \left[E_1 \left(\frac{x_2}{\lambda B} \right) \right] \quad (12)$$

(12)式表明, 输出光场是输入光场经过比例缩放的普通傅里叶变换。

3) 当 $B=0$ 时, 由(8)式得 $\alpha=\pi$, $M=A$, $R=\infty$, 代入(10)式, 得

$$E_2(x_2) = \frac{e^{-\alpha/2}}{\sqrt{A}} F_{\pi} \left[E_1 \left(\frac{x_2}{A} \right) \right] \quad (13)$$

(13)式表明, 输出光场是输入光场经过比例缩放的 2 次傅里叶变换, 它对应一个成像过程。

3 频域中一阶光学系统的分数傅里叶表述

空域中 Collins 积分变换在相空间中的作用可由(6)式表示。将输入输出光场在相空间中作 $\pi/2$ 角旋转可得到其角谱的相空间表示。将(6)式作如下分解:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}}_{\text{输出角谱相空间表示}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \lambda B \\ C/\lambda & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}}_{\text{衍射系统的作用}} = \underbrace{\begin{pmatrix} D & -C/\lambda \\ -\lambda B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}}_{\text{输入角谱相空间表示}} \quad (14)$$

由(14)式可知, 一阶光学系统对输入角谱的相空间变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -C/\lambda \\ -\lambda B & A \end{pmatrix} \quad (15)$$

它对应(1)式给出的线性正则变换:

$$A_2(\sigma_2) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{b}} \int A_1(\sigma_1) \exp\left[\frac{i\pi}{b}(a\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + d\sigma_2^2)\right] d\sigma_1 = \left(\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{C/\lambda}}\right) \int A_1(\sigma_1) \exp\left[-\frac{i\pi}{C/\lambda}(D\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + A\sigma_2^2)\right] d\sigma_1 \quad (16)$$

这就是一阶光学系统在频域中的 Collins 衍射积分公式^[5], 式中 $A_1(\sigma_1)$ 和 $A_2(\sigma_2)$ 分别是输入输

出光场 $E_1(x_1)$ 和 $E(x_2)$ 的傅里叶变换谱。

为了得到频域衍射积分公式的分数傅里叶表示, 仿照(7)式的处理方法, 将相空间变换矩阵(15)式进行以分解:

$$\begin{pmatrix} D & -C/\lambda \\ -\lambda B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\lambda B' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M' & 0 \\ 0 & 1/M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha' & \sin \alpha' \\ -\sin \alpha' & \cos \alpha' \end{pmatrix} \quad (17)$$

由以上矩阵方程得:

$$\begin{cases} D = M' \cos \alpha' \\ -\frac{C}{\lambda} = M' \sin \alpha' \\ -\lambda B = \frac{M' \cos \alpha'}{\lambda R'} - \frac{\sin \alpha'}{M'} \\ A = \frac{M' \sin \alpha'}{\lambda R'} + \frac{\cos \alpha'}{M'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha' = \frac{C}{\lambda D} \\ M' = \sqrt{D^2 + \frac{C^2}{\lambda^2}} \\ \frac{1}{\lambda R'} = \frac{A}{C/\lambda} + \frac{D}{C/\lambda(D^2 + C^2/\lambda^2)} \end{cases} \quad (18)$$

根据相空间变换矩阵因子与空间积分变换之间的关系, 由(17)式和(18)式可将(16)式改写为

$$A_2(\sigma_2) = e^{i\pi\sigma_2^2/\lambda R'} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{M' \sin \alpha'}} \int A_1(\sigma_1) \exp\left[i\pi\left(\cot \alpha' \cdot \sigma_1^2 - 2\sec \alpha' \cdot \sigma_1\left(\frac{\sigma_2}{M'}\right) + \cot \alpha' \cdot \left(\frac{\sigma_2}{M'}\right)^2\right)\right] d\sigma_1 = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{M'}} e^{i\pi\sigma_2^2/\lambda R'} F_a\left[A_1\left(\frac{\sigma_2}{M'}\right)\right] \quad (19)$$

这就是一阶光学系统在频域中的分数傅里叶变换表示, 从(19)式可看出, 一阶 ABCD 光学系统在频域中也都可以表示为一个经过 M' 比例缩放和二次相位 $e^{i\pi\sigma_2^2/\lambda R'}$ 调制的分数傅里叶变换。其中二次相位调制可通过选择一个半径为 R' 的球面作输出频谱的观察面而得以消除。

下面对同一光学系统在空、频域中的积分变换作一比较:

(14) 式一阶 ABCD 光学系统在空、频域中的实现如图 1 所示。

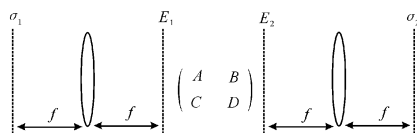


图 1 空、频域变换的光学系统

Fig. 1 Optical System of space and frequency domain transform

由图 1 可见, 一阶光学系统在频域中的变换只比其空域变换在装置上多了 2 个傅里叶变换透镜。它们在相空间中的作用是通过过渡矩阵 $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 实现基坐标转换的, 结果使系统的空域

变换矩阵 $\begin{pmatrix} A & \lambda B \\ C/\lambda & D \end{pmatrix}$ 变成了一个频域相似矩阵 $T^{-1} \begin{pmatrix} A & \lambda B \\ C/\lambda & D \end{pmatrix} T$, 由相似矩阵的性质^[10]可知, 2 个变换矩阵在本质上是相同的, 属于同一个线性变换在不同基坐标下的表示。

比较(8)式和(18)式, 当 $A = D, \lambda B = -C/\lambda$ 时, 系统在空域和频域有完全相同的分数傅里叶表示。又因为 $AD - BC = 1$, 所以有 $A^2 + (\lambda B)^2 = 1$, 若取 $A = \cos \alpha, \lambda B = \sin \alpha$ 则系统在空域和频域都是标准的 α 阶分数傅里叶变换, 这也说明标准分数傅里叶变换在空域和频域具有对称性^[5]。

4 结束语

本文在维格纳相空间中, 通过引入比例缩放和二次相位调制, 找到了一阶光学系统坐标变换矩阵与分数傅里叶坐标旋转矩阵的关系, 得到了空域 Collins 积分公式的分数傅里叶表示。通过对系统在相空间变换矩阵的分解和重组得到了频域衍射积分的相空间变换关系, 从而得到了频域 Collins 衍射积分公式及其分数傅里叶表示。通过本文的分析, 表明从相空间来理解一阶光学系统的分数傅里

叶表述,有助于一阶光学系统分析。

参考文献:

- [1] COLLINS S A, Jr. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics[J]. J. Opt. Soc. Am., 1970, 6(9): 1168-1177.
- [2] OZAKTAS M H, MENDLOVIC D. Fractional Fourier optics[J]. J. Opt. Soc. Am. A, 1995, 12(4): 743-751.
- [3] OZAKTAS M H, ZALEVSKY Z, KUTAY M A. The fractional Fourier transform with applications in optics and signal processing [M]. John Wiley & Sons, LTD, 2000.
- [4] ZHAO D, WANG S. Collins formula in spatial-domain written in terms of fractional Fourier transform or fractional Hankel transform [J]. Optik, 2000, 111(8): 371-374.
- [5] LIU Z, WU X, FAN D. Collins formula in frequency-domain and fractional Fourier transform [J]. Opt. Commu., 1998, 155(1): 7-11.
- [6] BASTIAANS M J. Wigner distribution function and its application to first-order optics[J]. J. Opt. Soc. Am., 1979, 69: 1710-1716.
- [7] LOHMANN A W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform[J]. J. Opt. Soc. Am. A, 1993, 10(10): 2181-2186.
- [8] MOSHINSKY M., QUESNE C. Linear canonical transformations and their unitary representations [J]. J. Math. Phys., 1971, 12(8): 1772-1783.
- [9] BASTIAANS M J. Application of the Wigner distribution function in optics[J]. Proceedings of AIP Conference, 1980: 292-312.
- [10] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979.
Compiling group of mathematical handbook. Mathematical handbook [M]. Beijing: Higher Education Press, 1979. (in Chinese)