

文章编号: 1002-2082(2005)05-0017-04

互补 Sierpinski 地毯光栅夫琅和费衍射现象的研究

田磊, 戴冬云, 刘生华

(孝感学院, 湖北 孝感 432000)

摘要: 利用菲涅耳-基尔霍夫光栅衍射原理和傅里叶分析方法, 对具有分形结构互补 Sierpinski 地毯光栅的夫琅和费衍射现象进行了探讨。导出了观察平面上的频谱函数、振幅函数以及光强函数。运用 MATLAB 软件对该光栅的衍射现象进行了仿真, 并绘制出其幅-频特性曲线。结果表明, 在各阶光栅的衍射图样中, 幅度较大的部分主要集中在接收屏的中心区域, 而在偏离中心的区域内, 幅度值较小, 在较远区域幅度值趋近于零, 这说明获得的衍射图样不仅具有衍射光的基本特性, 而且都呈现出明显的分形特征。

关键词: 分形光栅; Sierpinski 地毯; 夫琅和费衍射

中图分类号: O436.1-34

文献标识码: A

Study of Fraunhofer Diffraction From Complementary Sierpinski Carpet Grating

Tian Lei, Dai Dong-yun, LIU Sheng-hua

(Wonder School, Xiaogan University, Xiaogan 432100, China)

Abstract: The Fraunhofer diffraction phenomenon on the complementary structure of Sierpinski carpet grating is discussed on the basis of Fresnel-Kirchhoff theory and Fourier analytical method. The frequency spectrum, amplitude and light-intensity functions are derived. The diffraction phenomenon of grating is simulated by use of the MATLAB software, and the curves of its frequency response characteristic are plotted. The result shows that in diffraction patterns of all-order gratings, the higher amplitude part is concentrated in the center area of the receiving screen and the lower amplitude in the area around the center, but in the further area far away from center it tends to 0. In the whole, the diffraction patterns manifest the obvious fractal characteristics as well as the basic features of the diffraction.

Keywords: fractal grating; Sierpinski carpet; Fraunhofer diffraction

引言

分形的兴起和发展对自然科学的各个领域都产生了巨大的影响。由于分形结构大多数都呈现出一定形式的自相似性, 因此研究具有分形结构的物体既有一定的理论意义, 又具有实际意义。分形理论在物理学中的应用使物理学的研究发生了重大变化, 由此产生了“物理学中的分形”和“分形上的物理学”。现代通信的飞速发展, 尤其是光纤通信的迅速发展, 使光栅在光栅测量、光栅传感、光纤通信、全息图像等众多方面得到了广泛的应用。在测量方面, 现已研制成功并应用于实际的光栅测量系统具有大量程、高精度、稳定性好以及性价比高等

优点。在通信方面, 光纤光栅以其良好的光学特性已应用于光纤通信(如光纤激光器、光纤调制器、光纤滤波器等); 在其他方面, 光栅传感器因具有分辨率高、重复性好、稳定性高、测量动态范围大而有广泛的用途, 将二维光栅应用于全息术能使产生的图像具有较高的分辨率。对分形光栅的衍射现象, 如 Cantor 型分形光栅、Sierpinski 地毯光栅的夫琅和费衍射现象, 已有学者进行了研究, 但对于这些分形光栅的互补结构光栅尚未见报道。本文对互补 Sierpinski 地毯光栅的夫琅和费衍射现象进行了研究, 并对分形光栅的光学特性作了进一步的探讨。

收稿日期: 2004-07-28; 修回日期: 2004-11-16

作者简介: 田磊(1982-), 男, 湖北省十堰市人, 主要从事电子信息科学与专业学习。

1 互补 Sierpinski 地毯光栅的结构

互补 Sierpinski 地毯光栅是将一尺寸为 $a \times a$ 的正方形玻璃平均分成 9 份,刻蚀出中心尺寸为 $(a/3) \times (a/3)$ 的正方形区域使光不能透过;再将其余 8 个边长均为 $(a/3) \times (a/3)$ 的正方形分别分成三等分,将中心部分刻蚀,使其也成为光不能通过的区域。依次类推,直到被刻蚀部分的边长为 $a/3^n$ (n 在理论上趋于无穷)。图 1 为 $n=3$ 时,三阶互补 Sierpinski 地毯光栅结构示意图。

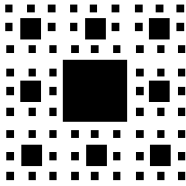


图 1 三阶互补 Sierpinski 地毯光栅的结构图

Fig. 1 Structure of 3-step complementary Sierpinski carpet grating

2 频谱特性

2.1 光栅的透过率函数

$$\begin{aligned}
 t_2(x_1, y_1) &= \text{rect}\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{y_1}{a_1}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_2}, \frac{y_1 - a_1}{a_2}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1 - a_1}{a_2}, \frac{y_1 - a_1}{a_2}\right) \\
 &\quad - \text{rect}\left(\frac{x_1 - a_1}{a_2}, \frac{y_1}{a_2}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1 - a_1}{a_2}, \frac{y_1 + a_1}{a_2}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_2}, \frac{y_1 + a_1}{a_2}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1 + a_1}{a_2}, \frac{y_1 + a_1}{a_2}\right) \\
 &\quad - \text{rect}\left(\frac{x_1 + a_1}{a_2}, \frac{y_1}{a_2}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1 + a_1}{a_2}, \frac{y_1 - a_1}{a_2}\right) \\
 &= \text{rect}\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{y_1}{a_1}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_2}, \frac{y_1}{a_2}\right) * [\delta(x_1, y_1 - a_1) \\
 &\quad + \delta(x_1 - a_1, y_1 - a_1) + \delta(x_1 - a_1, y_1) + \delta(x_1 - a_1, y_1 + a_1) + \delta(x_1, y_1 + a_1) \\
 &\quad + \delta(x_1 + a_1, y_1 + a_1) + \delta(x_1 + a_1, y_1) + \delta(x_1 + a_1, y_1 - a_1)] \\
 &= \text{rect}\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{y_1}{a_1}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_2}, \frac{y_1}{a_2}\right) \\
 &\quad * \left\{ \sum_m \sum_n [\delta(x_1 - ma_1, y_1 - na_1) - \delta(x_1, y_1)] \text{rect}\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}\right) \right\} \\
 &= \text{rect}\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{y_1}{a_1}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_2}, \frac{y_1}{a_2}\right) * \left\{ \left[\frac{1}{a_1^2} \text{comb}\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{y_1}{a_1}\right) - \delta(x_1, y_1) \right] \text{rect}\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{2}$$

定义函数

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = F_1 * F_2 * F_3 * \dots * F_n \tag{3}$$

它表示函数 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ 的连续卷积。对于 n 阶光栅有如下递推关系:

$$\begin{aligned}
 t_n(x_1, y_1) &= t_{n-1}(x_1, y_1) - \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_n}, \frac{y_1}{a_n}\right) \\
 &\quad * \bigcup_{j=1}^{n-1} \left\{ \left[\frac{1}{a_j^2} \text{comb}\left(\frac{x_1}{a_j}, \frac{y_1}{a_j}\right) - \delta(x_1, y_1) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=2}^n \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_i}, \frac{y_1}{a_i}\right) * \bigcup_{j=1}^{i-1} \left\{ \left[\frac{1}{a_j^2} \text{comb}\left(\frac{x_1}{a_j}, \frac{y_1}{a_j}\right) - \delta(x_1, y_1) \right] \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

设衍射光栅所在的平面为 (x_1, y_1) , 接收屏(观察面)所在平面为 (x, y) (两平面处于同一坐标系下), 它们之间的距离为 z 。设入射单色平面光的波

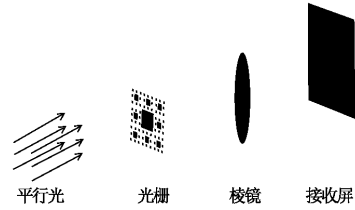


图 2 光栅衍射实验装置

Fig. 2 Laboratory equipment of grating diffraction

长为 λ , 光栅所在平面振幅为单位 1, 对 (x_1, y_1) 平面垂直入射(实验装置如图 2 所示, 其中, 光栅、透镜、接收屏的中心共轴)。定义 $a_n = a/3^n$ (n 取正整数), 如在本文中约定 $\text{rect}(x, y) = \text{rect}(x) \cdot \text{rect}(y)$, $\text{sinc}(x, y) = \text{sinc}(x) \cdot \text{sinc}(y)$, $\text{comb}(x, y) = \text{comb}(x) \cdot \text{comb}(y)$, 则可得一阶光栅的透过率函数:

$$t_1(x_1, y_1) = \text{rect}\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{y_1}{a_1}\right) \tag{1}$$

二阶光栅的透过率函数为

$$\text{rect}\left(\frac{x_1}{a_{j-1}}, \frac{y_1}{a_{j-1}}\right) \tag{4}$$

也可以表示为

$$\begin{aligned}
 t_n(x_1, y_1) &= \text{rect}\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{y_1}{a_1}\right) \\
 &\quad - \sum_{i=2}^n \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_i}, \frac{y_1}{a_i}\right) \\
 &\quad * \bigcup_{j=1}^{i-1} \left\{ \left[\frac{1}{a_j^2} \text{comb}\left(\frac{x_1}{a_j}, \frac{y_1}{a_j}\right) - \delta(x_1, y_1) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

• rect($\frac{x_1}{a_{j-1}}, \frac{y_1}{a_{j-1}}$)} (5)

2.2 夫琅和费衍射的复振幅

我们仅对满足下列条件的夫琅和费衍射现象进行讨论:

$E(x,y) = \frac{e^{ikz}e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}}}{iz\lambda} \oint \int t_n(x_1,y_1)e^{-ik\frac{xx_1+yy_1}{z}}dx_1dy_1$ (7)

将 $t_n(x_1,y_1)$ 代入上式得到衍射光的复振幅为

$E(x,y) = \frac{e^{ikz}e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}}}{iz\lambda} \oint \int t_n(x_1,y_1)e^{-ik\frac{xx_1+yy_1}{z}}dx_1dy_1$
 $= \frac{e^{ikz}e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}}}{iz\lambda} \oint \int e^{-ik\frac{xx_1+yy_1}{z}} \langle \text{rect}(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}) - \text{rect}(\frac{3x_1}{a}, \frac{3y_1}{a}) - \sum_{i=2}^n \text{rect}(\frac{x_1}{a_i}, \frac{y_1}{a_i}) \rangle dx_1dy_1$
 $\times \bigcup_{j=1}^{i-1} \{ [\frac{1}{a_j^2} \text{comb}(\frac{x_1}{a_j}, \frac{y_1}{a_j}) - \delta(x_1,y_1)] \cdot \text{rect}(\frac{x_1}{a_{j-1}}, \frac{y_1}{a_{j-1}}) \}$ (8)

2.3 频谱特性

在衍射屏(所在平面为 (x_1,y_1)) 后,由于入射光为单色平面光,因此该平面上的频谱函数即为透过率的傅里叶变换 $(F[t_n(x,y)])$ 为函数 $t_n(x,y)$ 的傅里叶变换

$G_1(f_x,f_y) = F[t_n(x_1,y_1)]$
 $= a^2 \text{sinc}(af_x, af_y) - \frac{a^2}{9} \text{sinc}(\frac{af_x}{3}, \frac{af_y}{3}) - \sum_{i=2}^n \{ a_i^2 \text{sinc}(a_i f_x, a_i f_y) \times \prod_{j=1}^{i-1} [4 \cos(2\pi a_j f_x)$
 $\times \cos(2\pi a_j f_y) + 2 \cos(2\pi a_j f_x) + 2 \cos(2\pi a_j f_y)] \}$ (9)

故在接收屏上的频谱函数为

$G_z(f_x,f_y) = G_1(f_x,f_y)e^{i\frac{2\pi z}{\lambda} \sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}}$
 $= \langle a^2 \text{sinc}(af_x, af_y) - \frac{a^2}{9} \text{sinc}(\frac{af_x}{3}, \frac{af_y}{3}) - \sum_{i=2}^n \{ a_i^2 \text{sinc}(a_i f_x, a_i f_y) \times \prod_{j=1}^{i-1} [4 \cos(2\pi a_j f_x)$
 $\times \cos(2\pi a_j f_y) + 2 \cos(2\pi a_j f_x) + 2 \cos(2\pi a_j f_y)] \} \rangle e^{i\frac{2\pi z}{\lambda} \sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}}$ (10)

根据频谱函数公式(10)绘制的接收屏((x,y)平面)上的幅频特性曲线如图3所示。其中,各参数为: $a=0.005$; $z=2$; $\lambda=0.0000007$ 。

图3分别画出了一阶、二阶、三阶及四阶互补 Sierpinski 地毯光栅的幅频特性曲线。通过 MATLAB 仿真可以看出,前三阶光栅的幅频特性有较大的差异,三阶及其以后各阶光栅的幅频特性差别不大。一阶光栅和二阶光栅幅度较大的部分较集中地分布于中心某一小区域内,没有呈现出明显的分形特征。对于三阶及其以上各阶光栅,主极大出现了凹陷,它的周围对称地分布着次极大包络波峰,次极大也以相同的规律被更高次的谐波波峰包围着,整个接收屏上的衍射图样呈现出明显的分形特征。从总体上说,各阶光栅的衍射图样不仅具有衍射光的基本特性,而且都呈现出一定的分形特征,幅度较大的部分主要集中在接收屏的中心区域,而在偏离中心的区域内幅度较小,在较远的区域内趋近于零。由此可以看出,互补 Sierpinski 地

$z \gg \frac{1}{2\lambda}(x_1^2+y_1^2)_{\max}$ (6)

让一束波长为 λ 的单色平面光垂直照射光栅,根据菲涅耳-基尔霍夫理论得 (x,y) 平面上衍射光的复振幅为

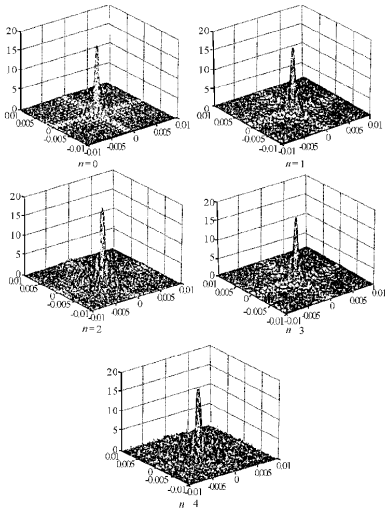


图3 幅频特性曲线

Fig.3 Curves of frequency response characteristic

毯光栅相当于一个低通滤波器, 通过控制孔径的大小可调节频率的范围。

3 光强

$$|A(x, y)| = \left| \frac{e^{ikz} e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}}}{iz\lambda} F[t_n(x_1, y_1)] \right|$$

$$= \left| \frac{a^2}{\lambda z} \text{sinc}\left(\frac{ax}{\lambda z}, \frac{ay}{\lambda z}\right) - \frac{a^2}{9\lambda z} \text{sinc}\left(\frac{ax}{3\lambda z}, \frac{ay}{3\lambda z}\right) - \sum_{i=2}^n \left\{ a_i^2 \frac{1}{\lambda z} \text{sinc}\left(\frac{a_i x}{\lambda z}, \frac{a_i y}{\lambda z}\right) \right. \right.$$

$$\left. \times \prod_{j=1}^{i-1} \left[4\cos\left(\frac{2\pi a_j x}{\lambda z}\right) \cos\left(\frac{2\pi a_j y}{\lambda z}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi a_j x}{\lambda z}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi a_j y}{\lambda z}\right) \right] \right\} \right| \quad (11)$$

也可表示成如下的递推形式

$$A_n(x, y) = \left| A_{n-1}(x, y) - \frac{a_n^2}{\lambda z} \text{sinc}\left(\frac{a_n x}{\lambda z}, \frac{a_n y}{\lambda z}\right) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left[4\cos\left(\frac{2\pi a_i x}{\lambda z}\right) \cos\left(\frac{2\pi a_i y}{\lambda z}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi a_i x}{\lambda z}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi a_i y}{\lambda z}\right) \right] \right| \quad (12)$$

3.2 光强

由光强公式 $I(x, y) = |A(x, y)|^2$ 得

$$I(x, y) = |A(x, y)|^2$$

$$= \left\langle \frac{a^2}{\lambda z} \text{sinc}\left(\frac{ax}{\lambda z}, \frac{ay}{\lambda z}\right) - \frac{a^2}{9\lambda z} \text{sinc}\left(\frac{ax}{3\lambda z}, \frac{ay}{3\lambda z}\right) - \sum_{i=2}^n \left\{ a_i^2 \frac{1}{\lambda z} \text{sinc}\left(\frac{a_i x}{\lambda z}, \frac{a_i y}{\lambda z}\right) \right. \right.$$

$$\left. \times \prod_{j=1}^{i-1} \left[4\cos\left(\frac{2\pi a_j x}{\lambda z}\right) \cos\left(\frac{2\pi a_j y}{\lambda z}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi a_j x}{\lambda z}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi a_j y}{\lambda z}\right) \right] \right\} \right\rangle^2 \quad (13)$$

4 结论

本文通过对具有分形结构的互补 Sierpinski 地毯光栅的夫琅和费衍射现象的探讨可以看出, 它的光学性质具有的明显分形特征。由频率特性曲线可以看出, 当光栅达到一定的阶数以后, 入射光不再能通过光栅, 且幅度从中心位置向四周迅速减小, 光强也呈现出相似的性质。因此, 该光栅相当于一个低通滤波器, 让一定范围频率的光波透过, 而对超出该范围频率的光波有很好的屏蔽作用。

值得指出的是, 本文虽然将光栅的尺寸定义为 $a \times a$, 但实际上, 如果不限定光栅尺寸, 按照相同的规律制作互补 Sierpinski 地毯光栅, 则它们的夫琅和费衍射具有相同的结果。这是由该光栅的特殊结构所决定的。

致谢: 感谢熊平凡教授给予的指导。

参考文献:

- [1] 李平. Cantor 型分形光栅的夫琅和费衍射特性研究[J]. 大学物理, 2002, 21(11): 11-14.
- [2] 吴振森, 徐良. 分形光栅的散射[J]. 电子科学学报,

3.1 振幅函数

根据傅里叶光学可得到接收屏 $((x, y)$ 平面)

上衍射光的振幅:

1997, 19(4): 516-521.

- [3] 谢诒成, 徐光梅. 分形光栅的夫琅和费衍射[J]. 北京工业大学学报, 1996, 22(3): 1-6.
- [4] 钟锡华. 现代光学基础[M]. 北京: 北京大学出版社, 2003.
- [5] 惠淑兰, 段存丽, 陈智利. 夫琅和费衍射模拟显示研究[J]. 应用光学, 2000, 21(3): 22-24.
- [6] 戴兵. 类圆环的夫琅和费衍射[J]. 应用光学, 2004, 25(1): 9-11.
- [7] 姚启钧. 光学教程(第3版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [8] 张克潜, 李德杰著. 微波与光电子学中的电磁理论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2001.
- [9] 赵成美, 丁兰英. 干涉与衍射[M]. 北京: 科学出版社, 1990.
- [10] 卞松玲, 刘木兴, 刘良读, 等. 傅里叶光学[M]. 北京: 兵器工业出版社, 1989.
- [11] 黄婉云. 傅里叶光学教程[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985.
- [12] 李俊昌. 激光的衍射及热作用计算[M]. 北京: 科学出版社, 2003.