

文章编号:1002-2082(2013)01-0085-05

# 基于峰值信噪比和小波方向特性的 图像奇异值去噪技术

王 敏<sup>1</sup>, 周 磊<sup>2</sup>, 周树道<sup>1</sup>, 叶 松<sup>1</sup>

(1. 解放军理工大学 气象海洋学院, 江苏 南京 211101; 2. 南京南瑞继保电气有限公司, 江苏 南京 211101)

**摘 要:**提出一种利用小波变换子图像不同的方向特性和峰值信噪比进行奇异值分解的图像去噪算法。由于图像经过小波变换后,低频子图像集中了原图像的大部分能量噪声,故仅作简单维纳滤波;而噪声则主要集中在小波域中的三个不同方向的高频子图中,且系数较小,因此可以利用奇异值分解进行去噪处理,即用较大的奇异值和对应的特征向量重构出去噪图像,然而由于奇异值分解固有的行列方向性,对于高频对角线子图重构出的图像去噪效果不理想,故采取旋转至行列方向后再进行常用的奇异值滤波;最后将去噪后的低频和高频子图进行小波反变换重构出最终的去噪图像,其中重构所需的奇异值个数由图像的峰值信噪比确定。实验结果表明,该方法在有效去噪的同时较好的保留了原有的高频细节信息。

**关键词:**图像去噪;小波变换;奇异值分解;峰值信噪比;小波重构

**中图分类号:**TN911.73

**文献标志码:**A

**doi:**10.5768/JAO201334.0102005

## Image SVD denoising based on PSNR and wavelet directional feature

WANG Min<sup>1</sup>, ZHOU Lei<sup>2</sup>, ZHOU Shu-dao<sup>1</sup>, YE Song<sup>1</sup>

(1. Institute of Meteorology and Oceanography, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China;

2. NR Electric Co., Ltd., Nanjing 211101, China)

**Abstract:** An optimized image singular value decomposition (SVD) denoising algorithm based on wavelet transform directional information and peak signal to noise ratio (PSNR) was proposed. As most of the energy noises were concentrated in low-frequency sub-image after wavelet transform, the simple Wiener filtering was made; on the other hand, the image noises were mainly concentrated in the high-frequency sub-image with three different directions and the coefficient was smaller, so the larger singular values of SVD and their corresponding eigenvectors were used to reconstruct denoising image; however, because of the inherent directional feature of the SVD, the denoising result of image reconstructed from high-frequency diagonal sub-image was not satisfied, so the diagonal sub-image was rotated to the level (vertical) direction, then the SVD filtering was done; finally, the anti-wavelet transform was used to reconstruct the denoising image based on the low-frequency and high-frequency sub-images, and the required number of singular values was determined by PSNR of the image. Experimental results show that this method has effective denoising effect, while retaining the high-frequency original details.

**Key words:** image denoising; wavelet transform; singular value decomposition; peak signal to noise ratio; wavelet reconstruction

收稿日期:2012-02-26; 修回日期:2012-03-22

基金项目:国家自然科学基金(40976062); 解放军理工大学气象学院基础理论研究基金

作者简介:王敏(1983—),女,汉族,陕西咸阳人,讲师,硕士,主要从事图像处理、模式识别的研究工作。

E-mail:yu0801@163.com

## 引言

图像在生成或传输过程中因受到各种噪声的干扰和影响而使其降质,存在不同程度的边缘模糊、局部和整体的对比性较差等问题,对图像边缘检测、分割、特征提取和模式识别等后续处理产生重要的影响,因此高效率的去噪方法对于数字图像处理是一个必要且重要的环节<sup>[1]</sup>。

奇异值分解(singular value decomposition, SVD)是一种非线性滤波,具有良好的数值稳健性<sup>[2]</sup>。它从矩阵的角度出发,通过去除矩阵分解后的较小奇异值,然后用有效的较大奇异值重构矩阵来去噪。但是一般简单的奇异值滤波方法没有考虑到奇异值滤波的方向性特点,而图像的噪声仅分布在小波变换频率域的高频部分,又由于这些高频部分具有水平、垂直、对角线(45°/135°)方向特性,因此可以考虑对小波变换后的3个方向高频部分进行奇异值分解来达到滤波去噪的目的。

本文提出一种基于图像信噪比和小波方向特性的奇异值分解去噪方法。首先对含噪图像进行小波变换分解,然后对不同频率图像进行奇异值分解滤波,具体做法为:低频子图仅采用维纳滤波,水平和垂直方向高频子图直接采用基本奇异值分解滤波,而对角线方向高频子图旋转至水平或垂直方向后再进行奇异值滤波,其中重构所需的奇异值个数由图像的信噪比确定;最后将去噪后的低频、高频子图进行小波反变换重构,得到最终的去噪图像。

## 1 小波变换方向特性

小波分析同时具有良好的空间-频率局部化特性,可将信号分解成许多具有不同的分辨率、频率特性和方向特性的子带信号,被誉为数学显微镜。二维图像信号在尺度  $j-1$  上的 Mallat 分解公式<sup>[3-4]</sup>为

$$\begin{cases} C_j = H_c H_r C_{j-1} \\ D_j^1 = G_c H_r C_{j-1} \\ D_j^2 = H_c G_r C_{j-1} \\ D_j^3 = G_c G_r C_{j-1} \end{cases} \quad (4)$$

式中: $H$ 和 $G$ 分别为低通和高通滤波器; $H_r$ 、 $G_r$ 和 $H_c$ 、 $G_c$ 分别为 $H$ 、 $G$ 对行和列分别作用; $C_j$ 、 $D_j^1$ 、

$D_j^2$ 、 $D_j^3$ 分别对应于图像 $C_{j-1}$ 的低频成分、垂直方向上的高频成分、水平方向上的高频成分、对角方向上的高频成分。与之相应的二维图像的 Mallat 重构算法为

$$C_{j-1} = \tilde{H}_r \tilde{H}_c C_j + \tilde{H}_r \tilde{H}_c D_j^1 + \tilde{G}_r \tilde{G}_c D_j^2 + \tilde{G}_r \tilde{G}_c D_j^3 \quad (5)$$

式中: $\tilde{H}$ 、 $\tilde{G}$ 分别为 $H$ 、 $G$ 的共轭转置矩阵。若对二维图像进行 $N$ 层的小波分解,最终将有 $(3N+1)$ 个不同频带,其中有 $3N$ 个高频带和一个低频带。

图像经过一次正交小波变换后,图像被分解为4幅,如图1所示。其中左上角一幅是原图像的平滑逼近(低频 $LL$ ),其余为细节高频信息:左下角垂直细节部分 $HL$ ,右上角水平细节部分 $LH$ ,右下角对角线细节部分 $HH$ ,噪声和细节边缘大部分都存在于高频部分,故在此频域内设计滤波算法时应确保去噪同时尽可能完整保留细节有用信息。

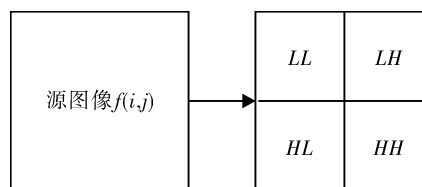


图1 小波分解示意图

Fig. 1 Schematic diagram of wavelet transform

## 2 奇异值滤波

奇异值分解图像去噪基本原理是通过奇异值分解,将图像矩阵在其奇异值分解左奇异值矩阵 $U$ 上作正交投影,就可以将包含图像信息的矩阵分解到一系列奇异值和奇异值矢量对应的子空间中,因为噪声的能量比较小所以它对应的奇异值也比较小,可以通过去除小奇异值滤掉噪声子空间然后在有效的信号子空间上重构图像矩阵,从而实现去除噪声的目的<sup>[5-6]</sup>。

### 2.1 奇异值分解

对于二维图像 $B$ 受到噪声 $X$ 污染后可表示为 $A \in R^{l_1 \times l_2}$  ( $l_1 \geq l_2$ ),设矩阵 $A$ 的秩 $rank(A) = r$  ( $r \leq l_2$ ),则 $A$ 的奇异值分解定义<sup>[7]</sup>为:

$$A = USV^T \quad (1)$$

式中: $U = (u_1, u_2, \dots, u_{l_1}) \in R^{l_1 \times l_2}$ 和 $V = (v_1, v_2, \dots, v_{l_2}) \in R^{l_1 \times l_2}$ 分别称作 $A$ 的左奇异矩阵和右奇

异矩阵,  $U$  和  $V$  的前  $l_2$  列向量分别称作  $A$  的左奇异向量和右奇异向量;  $S \in R^{l_1 \times l_2}$  称为奇异值阵, 其对角线元素  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_R > 0$  称为矩阵的非零奇异值, 并称  $\lambda_i$  为矩阵  $A$  的第  $i$  个奇异值。因为  $R$  为矩阵  $A$  的秩, 从式(1)中除去  $A$  的零奇异值, 则  $A$  可以精简表示为

$$A = \sum_{i=1}^R \lambda_i u_i v_i^T \quad (2)$$

从式(2)可以看出, 奇异值反映了矩阵的能量分布。矩阵的零奇异值并没有携带矩阵重构时所需要的信息, 在重构矩阵时可以将其忽略, 此外那些接近于零的奇异值也因仅含有少量矩阵重构信息, 也可以忽略。故只利用携带其信息的非零奇异值进行重构即可。即选取合适的奇异值数目  $k$  ( $k \leq$

$R$ ) 或者奇异值阈值  $\gamma$ , 去噪图像  $\hat{A}$  可近似为

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i v_i^T, \lambda \geq \gamma \quad (3)$$

## 2.2 奇异值分解的方向特性

研究发现  $A$  在奇异值分解后得到的  $U$  为  $AA^T$  的特征矢量 ( $V$  为  $A^T A$  的特征矢量), 即  $AA^T$  的列向量集的主成分矢量 ( $A^T A$  的行向量集的主成分矢量)。这样可建立起图像奇异值分解与主成分之间的关系, 即矩阵的奇异值分解等价于行列向量同步主成分分析。如果图像中仅有水平 (垂直) 线, 奇异值分解后的图像信号能量基本集中在少数较大奇异值与其对应的特征向量上, 代表着行列信息的前几个奇异值远远大于后面较小的奇异值, 用秩 1 重构图像几乎不损失原始图像信息; 反之, 对于非水平 (非垂直) 线条, 奇异值分解后, 前面较大的奇异值比后面较小的奇异值没有明显的优势, 图像信号能量散布在多个奇异值及对应的特征向量上, 仅用少数较大奇异值及对应的特征向量重构原图像不能取得良好的效果<sup>[8]</sup>。此为奇异值分解的方向性特征。

## 3 本文去噪算法

### 3.1 低频子图像滤波

小波分解后, LL 低频信息不但包含了原图的大部分主要信息, 还往往带有小部分噪声, 为提高去噪效果, 对其进行简单的自适应维纳滤波。该滤波器根据局部图像的差异来调整自己的参数。对局部差异大的地方进行小的平滑操作, 对局部差异小的地方进行大的平滑操作。此方法的滤波

效果比均值滤波效果要好, 对具有白噪声的图像滤波效果最佳。

### 3.2 高频子图 SVD 滤波

基于上述奇异值分解滤波和小波变换的方向特性特点, 可以考虑对于水平 (垂直) 方向高频子图采用基本奇异值滤波法去噪, 而对于对角线方向高频子图则可以采取旋转至水平方向后再进行基本奇异值滤波即可。具体做法如图 2 所示: 将对角线方向高频子图旋转  $45^\circ$  ( $135^\circ$ ) 至水平方向, 得到一个包含原图像的更大图像, 对于其中的非原图像部分用原图像的平均灰度值进行填充以便较好保持原图像经过旋转、去噪和截取后的周边信息; 然后进行 SVD、重构、截取重构图像的原图像部分; 最后逆旋转得到去噪后的原图像。

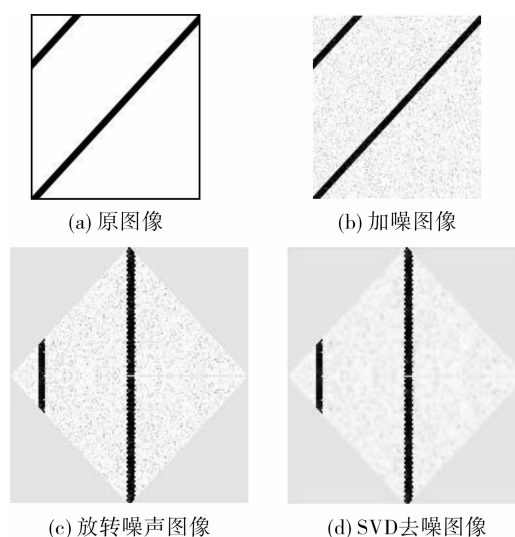


图 2 高频对角线子图去噪算法

Fig. 2 High-frequency diagonal sub-image denoising

### 3.3 去噪重构奇异值个数的确定<sup>[6]</sup>

截取的奇异值须能在去除噪声子空间能量的同时保留信号子空间的能量。式(3)中, 重构矩阵时所需的奇异值数目  $k$  共有  $1 \sim R$  种选择, 它的选择决定着图像去噪效果的好坏。本文采用图像的峰值信噪比 PSNR 作为衡量标准

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{\text{MSE}} \right) \quad (4)$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f(i, j) - f_0(i, j))^2}{MN}$$

式中:  $f(i, j)$  为去噪后图像的像素灰度值;  $f_0(i, j)$  表示原始图像的像素灰度值。

在以 PSNR 作为衡量去噪效果标准基础上。

可以对图像进行了  $1 \sim i$  次(为图像矩阵的秩)重构。每次重构使用前  $i$  个奇异值,最后在所有重构的图像中。峰值信噪比最高的那幅图像对应的重构奇异值数就为所需的重构奇异值数。也就是说对所有选用不同的奇异值数重构后的图像进行对比,去噪效果最好的那一幅对应的重构奇异值数目就是最终需要的奇异值数。

#### 4 实验仿真及结果分析

为验证本文提出方法的有效性,对典型的标准 Leana 图像加入方差为 10、均值为 0 的高斯白噪声图像图 3(a)进行仿真实验分析。分别采用常规的 SVD 滤波和小波硬阈值以及本文方法进行去噪处理,奇异值分解的阈值为  $3\sigma$ ,得到的实验结果图如图 3(b)、3(c)和 3(d)。为更好地比较去噪

后的效果,从数学角度分析,引进峰值信噪比 (PSNR)来衡量 3 种方法的去噪质量。一般情况下,PSNR 值越大,去噪效果也相应较好。表 1 是 3 种方法下的 PSNR 比较值。

表 1 3 种方法的 PSNR 表

Table 1 PSNRs of three algorithms

| 方法       | PSNR/dB |
|----------|---------|
| 小波硬阈值法   | 16.2118 |
| 普通 SVD 法 | 14.3701 |
| 本文方法     | 20.4233 |

从图 4 的仿真结果及表 1 的实验数据可以看出,本文算法的去噪效果均优于传统算法,其峰值信噪比比其它两种方法分别提高了 4.211 5 dB 和 6.053 2 dB。视觉效果体现了明显的优越性,同时较好地保留了图像细节信息。

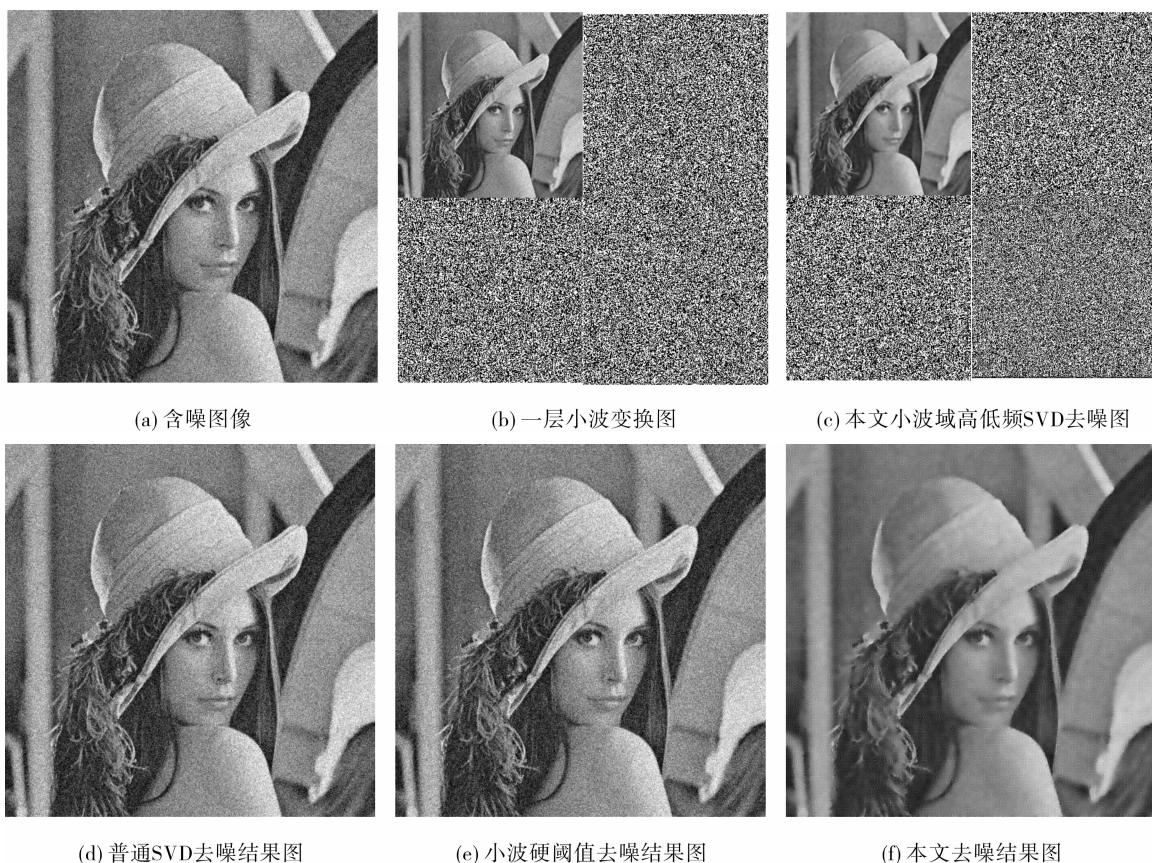


图 3 实验仿真结果图

Fig. 3 Simulation results

#### 5 结论

本文针对普通奇异值分解滤波去噪过程中未考虑图像的方向性特征而引起的去噪效果不佳的问题,提出了一种基于小波方向特性和峰值信噪比

的奇异值分解去噪方法。正是由于小波变换高频域里所具有的方向特性,将奇异值分解用在水平(垂直)以及旋转后的对角线子图上达到滤波目的。经过实验仿真证明该方法去噪效果优越,且图像非

水平(非垂直)方向细节信息得到了有效保留,对进一步的图像特征提取、目标检测和模式识别等方面奠定了一定基础。

#### 参考文献:

- [1] HOU Z. Adaptive singular value decomposition in wavelet domain for image denoising[J]. Pattern Recognition, 2003 (36):1747-1763.
- [2] KONSTANINIDES K, NATARAJAN B, YOVANOF G S. Noise estimation and filtering using block-based singular value decomposition[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997,6(3):479-483.
- [3] 周树道,王敏,刘志华,等. 基于多方向小波变换及形态学重构的 SAR 图像边缘检测[J]. 解放军理工大学学报:自然科学版,2011,12(5):436-439.  
ZHOU Shu-dao, WANG Min, LIU Zhi-hua et al. SAR image edge detection based on multi-directional wavelet transform and morphological reconstruction [J]. Journal of PLA University of Science and Technology: Natural Science Edition. 2011, 12(5): 436-439. (in Chinese with an English abstract)
- [4] 黄飞江,朱守业. 基于小波变换和改进 SVD 的红外图像去噪[J]. 激光与红外,2009,39(3):335-338.  
HUANG Fei-jiang, ZHU Shou-ye. Infrared image denoising based on wavelet transform and improved SVD [J]. Laser & Infrared, 2009, 39(3): 335-338. (in Chinese with an English abstract)
- [5] DEVCIC Z, LONCARIC S. SVD blok processing for nonlinear image noise filtering[J]. Journal of Computing and Information Technology, 1999, 7(3): 255-259.
- [6] 刘波,杨华,张志强. 基于奇异值分解的图像去噪[J]. 微电子与计算机,2007,24(11):169-174.  
LIU Bo, YANG Hua, ZHANG Zhi-qiang. Image denoising based on singular value decomposition[J]. Microelectronics & Computer, 2007, 24(11): 169-174. (in Chinese with an English abstract)
- [7] KONSTANINIDES K, YAO K. Statistical analysis effective singular values in matrix rank determination [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Process, 1988, 36(5): 757-763.
- [8] 张俊峰,孙清伟. 基于图像旋转和分块的奇异值分解图像去噪[J]. 激光与红外,2009,39(5):538-541.  
ZHANG Jun-feng, SUN Qing-wei. Image denoising based on SVD using image rotation and block[J]. Laser & Infrared, 2009, 39(5): 538-541. (in Chinese with an English abstract)