

文章编号:1002-2082(2019)05-0853-06

基于最小二乘法多项式拟合三角测量模型研究

卢治功^{1,2}, 贺 鹏^{1,2}, 职连杰^{1,2}, 陈文建³

(1. 中电科信息产业有限公司, 河南 郑州 450007; 2. 中国电子科技集团公司 第二十七研究所, 河南 郑州 450007;
3. 南京理工大学 电子工程与光电技术学院, 江苏 南京 210094)

摘 要:激光三角法具有非接触测量、测量范围大、相对测量精度高、结构简单、环境适应性强等多种优点,得到了广泛应用。但是三角测量的理论公式具有非线性特征,而且光学结构参数(a 、 b 、 θ)等在现实工程中具有不可测性。研究了三角测量中数学模型的建立方法,选用多项式展开方法建立数学模型。通过应用最小二乘法拟合多项式的方法求解模型系数,提出了根据最大相对拟合残差要求、结合相关系数用于控制拟合多项式阶数的评价方法,并通过实际光学系统验证了该方法的可行性,达到了0.01%的相对误差。最小二乘法拟合多项式的方法对于激光三角位移传感器的标定和系统误差消除具有实际的指导意义。

关键词:激光三角法测量;测量模型;最小二乘法;多项式拟合

中图分类号:TN201

文献标志码:A

DOI:10.5768/JAO201940.0503003

Laser triangulation measurement model based on least square polynomial fitting method

LU Zhigong^{1,2}, HE Peng^{1,2}, ZHI Lianjie^{1,2}, CHEN Wenjian³

(1. China Electronics Technology Information Industry Co., LTD., Zhengzhou 450007, China;

2. The 27th Research Institute of China Electronics Technology Group Corporation, Zhengzhou 450007, China;

3. School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

Abstract: The laser triangulation method has been widely applied due to its advantages in non-contact measurement, large measurement range, high accuracy in measurement, simple structure, high adaptability, etc. However, the theoretical formula of laser triangulation is nonlinear and the parameters(a , b , θ) of optic structure in practical engineering is immeasurable. Therefore, we investigated the construction approach of the mathematical model in triangulation, and adopted the polynomial expansion approach to build the model. Under the application of least square fitting polynomial method of the solution to the model coefficient, we proposed a evaluation method according to the requirements of the maximum relative fitting residual combined with the relative coefficients for controlling the fitting polynomial order. The feasibility of the method was verified by the practical optical system, with the relative error of 0.01%. The method of least square fitting polynomial has practical guiding significance for the calibration of laser triangular displacement sensor and the elimination of systematic error.

Key words: laser triangulation method; measurement model; least square method; polynomial fitting

收稿日期:2019-04-16; 修回日期:2019-06-11

作者简介:卢治功(1969—),男,副总工程师/高级工程师,主要从事激光测量技术研究。E-mail:1103718822@qq.com

引言

光学三角测量法是一种古老测量方法。二十世纪六十年代以来,随着激光技术和光电探测器件(PSD、CCD)的快速发展,利用激光器具有光束方向性好、亮度高的特点形成的激光三角测量法快速发展。它具有非接触测量、测量范围大(亚微米~百米量级)、相对测量精度高、结构简单、环境适应性强等多种优点,被广泛应用于工业自动化、航空航天、生物医学等国民经济多个领域。

工程应用中虽然激光三角测量的结构参数是确定的,但是其具体数值不具备准确度量的可能性,例如物方工作距离 a 、像方工作距离 b 、发射和接收光轴夹角 θ ,难以找到测量基准和测量方法进行准确测量;另外其理论计算模型也是非线性的。因此激光三角测量传感器均需要装配完成后进行模型标定。本文根据激光三角测量中计算模型的实际需要,研究分析了最小二乘法多项式拟合三角测量计算模型方法,提出了根据最大相对拟合残差要求,结合相关系数用于控制拟合多项式阶数的评价方法,并通过实际测量系统的数据进行了验证分析。

1 激光三角测量方法检测原理及影响因素

1.1 激光三角测量方法检测原理

激光三角法利用了被测物体表面对激光束的漫反射效应,是最常用的激光测位移的方法之一。图1分别给出单点式激光三角法斜射结构^{[2-3][11-13]}。

其测量原理是:激光器1发出光线经透镜2倾斜(或垂直)入射到被测物体表面3形成光斑,物体表面高度变化导致入射光点沿入射光轴移动,光斑透过透镜4成像在CCD光敏面5上。若光斑点在成像面上的位移为 y ,像点在被测面的位移 Y ,则有(1)式所示关系存在。

$$y = \frac{aY \cos \theta_1}{b \sin(\theta_1 + \theta_2) - Y \cos(\theta_1 + \theta_2)} \quad (1)$$

式中: a 为激光束光轴和接收透镜光轴的交点到透镜前主面的距离; b 为接收透镜后主面到成像面中心点的距离; θ_1 为激光束光轴和被测面法线的夹角; θ_2 为成像透镜光轴和被测面法线的夹角。当 $\theta_1 = 0$ 时,相当于直射式三角测量,关系式变化为(2)式。

$$y = \frac{aY}{b \sin \theta_2 - Y \cos \theta_2} \quad (2)$$

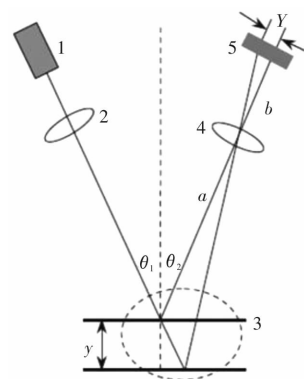


图1 激光三角法斜射式结构

Fig. 1 Laser triangulation oblique structure

在实际应用中,一般采用激光三角法直射结构方案。本文是研究激光三角测量的模型建立方法,用(1)式作为分析的基础更具有普遍意义。

1.2 影响激光三角测量的主要因素

在实际三角测量系统中,存在许多影响因素,在文献[1-3][11]中有详细的分析。首先是成像系统误差;二是光电传感器、电路处理误差;三是数据处理误差;四是温度、湿度等环境因素误差;最后是被测表面引入的误差。上述影响因素中,最后两项为外部因素,取决于使用环境和被测目标。本文主要研究测量模型的内在问题,不考虑这两项。

本文主要研究的是测量过程中的系统误差消除、讨论建立数据模型的方法。在激光三角测量中系统误差的来源包括光学系统引入的误差、CCD(PSD)定位的非线性^[6]、处理电路引入的误差。

计算(1)式是在理想情况下得到的,上述系统误差在实际应用中难以度量和消除,只有通过标定的方法才能建立准确的测量模型,消除系统误差。

1.3 测量数学模型建立的依据和方法

三角测量计算公式(1)虽然在实际中不能完全通过各种参数确定,但是根据光学成像规律,在成像范围内物点位移 y 和像点位移 x 之间一一对应、无尖角(极限处处存在)、无间断点,因此一定存在一个光滑、连续函数 $y=f(x)$ 。根据泰勒定理,任何一个光滑函数均可以展开为一个无穷多项式:

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (3)$$

因此,测量数学模型可以通过测量一组像点

和对应物点的数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, m)$, 拟合一个 n 次多项式 $P_n(x)$ 来逼近 $f(x)$, 求得一个近似解析表达式:

$$y = f(x) \approx P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (4)$$

2 最小二乘法拟合多项式的基本原理

在科学实验中^[4], 经常从一组实验数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, m)$ 出发, 寻求函数 $y = f(x)$ 的一个近似表达式 $y = p(x)$ 。由于实验数据带有一定误差, 一般用曲线拟合的方法进行数据处理。文献[8-9][15]对数据拟合进行了详尽的分析。

通常根据“使偏差平方和最小”的原则来选取拟合曲线 $y = p(x)$, 这种方法称为最小二乘法。用最小二乘法解决实际问题有两个步骤: 第一、根据所给数据点的变化趋势确定 $p(x)$ 所具有的形式; 第二、按最小二乘法求得最小二乘解。经常采用最小二乘曲线拟合 $y = p(x)$ 具有多项式形式:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n (n < m) \quad (5)$$

(5) 式是关于 x 的 n 次多项式。根据最小二乘法的定义, 就是要通过给定的数据集 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, m)$, 确定系数 a_j 使得在各个点上的偏差 δ_i 平方和 $\sum_{i=1}^m \delta_i^2 = \sum_{i=1}^m [\sum_{j=0}^n a_j x_i^j - y_i]^2$ 达到最小。因此, 将 m 对数据代入(5)式, 就得到了一个具有 $n+1$ 个未知数 a_j 的 m 个方程:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_m + a_2x_m^2 + \dots + a_nx_m^n = y_m \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{记 } \alpha = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{bmatrix}$$

则方程组(6)可以表示为: $C_a = \gamma$, 构建对应的

正规方程组为 $C^T C a = C^T \gamma$, 它是关于 $n+1$ 个未知量 $a_j (j = 0, 1, 2, \dots, n)$ 的线性方程组。只要它的系数行列式 $|C^T C| \neq 0$, 就可求得方程组(6)的唯一

的一组最优近似解, 使得 $\sum_{i=1}^m \delta_i^2$ 取得极小值, 从而求得最小二乘拟合多项式。由于 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 互异, 故矩阵 C 的 $n+1$ 个列向量线性无关, 从而 C 的秩 $R(C) = n+1$, 这表明 $C^T C$ 非奇异, 故方程组(6)的解存在且唯一。

求解最小二乘拟合多项式系数, 即求出正规方程组的解: $\alpha = (a_0^*, a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$, 则最小二乘拟合多项式为 $p_n(x) = a_0^* + a_1^*x + a_2^*x^2 + \dots + a_n^*x^n$ 。

3 建立实验光学系统及数据分析

3.1 数据计算模型的评价

本文拟通过最小二乘拟合多项式 $p_n(x) = a_0^* + a_1^*x + a_2^*x^2 + \dots + a_n^*x^n$ 来建立三角测量的计算模型。在给定的 m 对测量点条件下, 一般情况下多项式的阶数越高拟合效果越好, 但是高阶多项式的正规方程倾向于病态, 计算过程极易受到舍入误差的影响, 求解的系数可能是不准确的。因此需要引入一定的评价指标, 在满足指标要求的前提下确定多项式的最高阶数。本文采用决定系数 r^2 (相关系数 r) 和相对最大残差两个指标评价拟合结果。

首先, 分析决定系数 r^2 (相关系数 r 的平方) 的计算方法公式(7)。

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} \times 100\% \quad (7)$$

决定系数 r^2 反映了多项式拟合的置信度。本文采用“ 3σ 原则”, 即置信度 99.74%。

其次, 分析相对最大残差的计算方法。由于测量数据带有一定的误差, 最小二乘拟合得到的是个总体评价, 为了控制特殊点存在较大的偏差, 引入一个相对最大残差 ϵ 来评价拟合结果。相对最大残差计算方法定义如下:

$$\epsilon = \frac{\text{Max}(|p_n(x_i) - y_i|)}{|y_m - y_0|} \times 100\% \quad (8)$$

式中: $|y_m - y_0|$ 为系统的最大测量范围。

一般的测量仪器给出的指标采用相对误差的概念, 以满量程的百分比表示。相对最大残差与其相当, 设计者可以根据系统测量误差要求选择合适的相

对最大残差值控制多项式的阶数,比如选择 0.1%。

3.2 数据计算模型的应用

应用上述数据模型的建立方法,开发了两款激光位移传感器,并在某工业生产线上得到了应用。激光位移传感器采用垂直入射型激光三角测量原理,光学详细结构及实验装置如图 2 所示。

具体光学结构数据及要求如表 1 所示。

两款激光位移传感器标定用的原始数据如表 2 所示。

运用最小二乘法构建正规方程、拟合多项式、计算拟合结果,按照定义式,求出决定系数和相对最大残差,结果如表 3 所示。

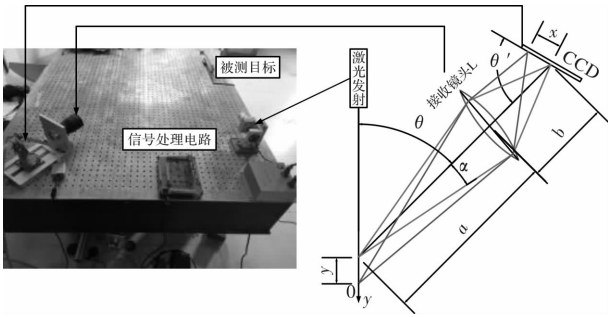


图 2 光学结构及实验装置图
Fig. 2 Optical structure and experimental device diagram

表 1 光学结构数据
Table 1 Optical structure data

序号	工作距离 L/mm	测量范围 W/mm	物镜焦距 f/mm	夹角/ $^\circ$	CCD 类型	测量误差/ mm
1	720	80	172	45	TCD1501	0.03
2	980	80	213	45	TCD1501	0.03

表 2 实验原始数据
Table 2 Experimental raw data

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1# 像点位置 x_i	27 376	23 965	20 669	17 495	14 423	11 456	8 585	5 796	3 096
2# 像点位置 x_i	24 387	22 303	20 162	17 976	15 742	13 443	11 093	8 682	6 208
物点位置 y_i/mm	0	10	20	30	40	50	60	70	80

表 3 最终计算结果
Table 3 Final calculation results

1#	$ P_1(x)-y_i ^2$	$ P_2(x)-y_i ^2$	$ P_3(x)-y_i ^2$	$ P_4(x)-y_i ^2$	$ P_5(x)-y_i ^2$	$ P_6(x)-y_i ^2$
决定系数 $r^2/\%$	99.890 727 77	99.999 915 86	99.999 996 10	99.999 996 92	99.999 999 49	100.000 000 00
最大相对残差 $\epsilon/\%$	1.735 535 09	0.041 035 72	0.011 040 64	0.010 637 10	0.003 930 16	0.000 000 51
2#	$ P_1(x)-y_i ^2$	$ P_2(x)-y_i ^2$	$ P_3(x)-y_i ^2$	$ P_4(x)-y_i ^2$	$ P_5(x)-y_i ^2$	$ P_6(x)-y_i ^2$
决定系数 $r^2/\%$	99.942 352 08	99.999 960 38	99.999 992 35	99.999 992 56	99.999 993 91	100.000 000 00
最大相对残差 $\epsilon/\%$	1.270 742 99	0.029 958 82	0.018 145 74	0.017 229 01	0.013 162 22	0.000 007 80

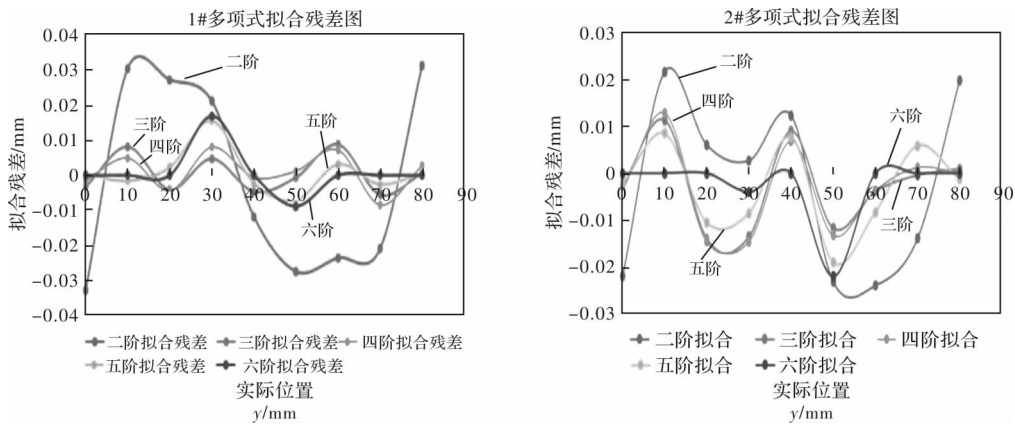


图 3 多项式拟合残差图
Fig. 3 Diagram of polynomial fitting residual

从表3可以看出,基于最小二乘多项式拟合三角测量模型的方法可以很好地拟合测量数据,在6阶多项式拟合时,决定系数可以达到100%,最大相对残差 ϵ 可以达到 10^{-7} 量级。

同时从表3可以看出,只考虑决定系数满足“ 3σ 原则”时,线性拟合就可以达到要求,但是最大相对残差 ϵ 只能达到1%;需要3阶多项式拟合才能满足最大相对残差0.1%的要求。因此采用相对残差来控制多项式的阶数更具有实际意义。

在两款激光位移传感器的原始数据中,使用了7组数据拟合多项式模型,第4、6两项数据没有参与拟合运算,用于验证模型的可靠性。从图3可以看出30、50 mm处最大误差0.021 mm,拟合结果满足测量精度0.03 mm的要求,设计达到了预期的测量效果。

4 结论

本文提出的基于最小二乘多项式拟合三角测量模型的方法在实际数据计算中取得了很好的效果,拟合3阶多项式就可以达到很高的测量精度,6阶多项式甚至可以达到 10^{-7} 量级的测量精度。本文提出的运用决定系数、最大相对残差综合评价拟合结果方法来控制拟合多项式的阶数,在满足设定测量要求的情况下,有效减少计算量。通过两款激光位移传感器的实际应用,证明了本方法具备测量的准确性、实际测量的可行性。

参考文献:

- [1] HUANG Zhanhua, CAI Huaiyu, LI Heqiao, et al. Analysis for error in triangular laser measurement system and an elimination method[J]. Opto-Electronic Engineering, 2002, 29(3): 58-61.
黄战华, 蔡怀宇, 李贺桥, 等. 三角法激光测量系统的误差分析及消除方法[J]. 光电工程, 2002, 29(3): 58-61.
- [2] REN Weiming, SUN Peimao, WANG Yalei, et al. A calibration method for laser displacement system based on triangulation[J]. Optical Technology, 1997(3): 10-15.
任伟明, 孙培懋, 王亚雷. 一种标定三角测量法激光位移计的方法[J]. 光学技术, 1997(3): 10-15.
- [3] HE Kai, CHEN Xing, WANG Jian, et al. Analysis of error in high precision laser triangulation displacement measurement system[J]. Optics & Optoelectronics Technology, 2013, 11(3): 62-66.
何凯, 陈星, 王建新. 高精度激光三角位移测量系统误差分析[J]. 光学与光电技术, 2013, 11(3): 62-66.
- [4] BAI Fuzhong, ZHANG Xiaoyan, LIU Zhen, et al. Effect of working angle on system sensitivity in laser triangulation[J]. Journal of Applied Optics, 2017, 38(5): 826-830.
白福忠, 张小艳, 刘珍, 等. 激光三角法中工作角对系统灵敏度的影响[J]. 应用光学, 2017, 38(5): 826-830.
- [5] FENG Junyan, FENG Qibo, KUANG Cuifang. Present status of high precision laser displacement sensor based on triangulation[J]. Journal of Applied Optics, 2004, 25(3): 33-36.
冯俊艳, 冯其波, 匡萃方. 高精度激光三角位移传感器的技术现状[J]. 应用光学, 2004, 25(3): 33-36.
- [6] LI Tianze, WANG Shengde, LU Hengwei, et al. Nonlinearity analysis and application of optoelectronic position sensitive detector[J]. Journal of Applied Optics, 2006, 27(5): 400-403.
李田泽, 王生德, 卢恒伟, 等. 光电位置敏感器件的非线性分析及应用[J]. 应用光学, 2006, 27(5): 400-403.
- [7] JIN Pan, TU Dawei, ZHANG Xu. Theoretical modeling and simulation analysis of underwater synchronous scanning triangulation imaging system [J]. Journal of Applied Optics, 2018, 39(6): 849-855.
金攀, 屠大维, 张旭. 水下同步扫描三角测距成像理论建模及仿真分析[J]. 应用光学, 2018, 39(6): 849-855.
- [8] CHEN Guixiu. Solve the least square curve fitting polynomial coefficient with program [J]. Journal of Qinghai Normal University (Natural Science), 2010(3): 14-17.
陈桂秀. 用程序求解最小二乘拟合多项式的系数[J]. 青海师范大学学报(自然科学版), 2010(3): 14-17.
- [9] WANG Weibin, QIU Changquan. Compensating error of signal conditioning circuit based on least square curve fitting[J]. Computer Measurement & Control, 2009, 17(11): 2286-2291.
王伟斌, 邱长泉. 基于最小二乘曲线拟合的信号调理电路误差补偿方法[J]. 计算机测量与控制, 2009, 17(11): 2286-2291.
- [10] LU Zhigong, LIU Xianli, ZHI Lianjie, et al. The invention relates to a measuring method of laser automatic length measuring instrument: China, CN 1307225[P]. 2001-08-08.

- 卢治功,刘先礼,职连杰.一种激光自动测长仪的测量方法:中国,CN1307225[P].2001-08-08.
- [11] AXELI Dongs,REINHARD Noll. Laser measurement technology: Fundamentals AND applications [M]. ZHANB Shulian, translation. Wuhan: China University of Science and Technology Press, 1997.
- 阿克塞尔 多涅斯,莱因霍德诺尔.激光测量技术:原理及应用[M].张书练,译.武汉:华中科技大学出版社,1997.
- [12] SUN Changku, YE Shenghua. Laser measurement trchnology [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2000.
- 孙长库,叶声华.激光测量技术[M].天津:天津大学出版社,2000.
- [13] CHI Zeying, CHEN Wenjian. Applied optics and elements of optical design [M]. Beijing: Higher Education Press, 2017.
- 迟泽英,陈文建.应用光学与光学设计基础[M].北京:高等教育出版社,2017.
- [14] JIAO Mingbo, FENG Qingbo, WANG Ming, et al. Sensing and measuring with lasers [M]. Beijing: Science Press, 2014.
- 焦明星,冯其波,王鸣等[M].北京:科学出版社,2014.
- [15] STEVEN C, CHAPRA, RAYMOND P Canale. Numerical methods for engineers [M]. Fifth Edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2007.